第48講　必要十分条件

48　次の各問いに答えよ．

(1)　平面上の曲線 $y=a(x-b)^2+c$ を考える．ただし，a，b，c は実数の定数で $a\neq 0$ とする．この曲線上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ における接線が x 軸と交点をもつとき，その交点を $(f(p),\ 0)$ とする．$f(p)$ が p の1次関数になるための a，b，c の必要十分条件を求めよ．

(2)　自然数 n の約数の個数を d とする．n の約数すべてを小さい順に並べて得られる数列を a_k $(1\leqq k\leqq d)$ とする．したがって，$a_1=1$，$a_d=n$，$a_k<a_{k+1}$ $(1\leqq k<d)$ である．このとき，n に対する次の2つの条件(イ)，(ロ)は互いに同値〔(イ) $\Longleftrightarrow$ (ロ)〕であることを示せ．

(イ)　n は60の倍数である．

(ロ)　n は6個以上の約数をもち，$\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_6}=\dfrac{1}{a_2}$ となる．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 48 講　必要十分条件

48　x，y，u，v を実数として

$$x^2+y^2=1,\ u^2+v^2=1,\ yv<0$$

を満たしているとする．このとき $(1+x+u)^2+(y+v)^2<1$ となるための必要十分条件を x と u を用いて表せ．

【選択肢】

㋐　$x+u<0$ かつ $-1\leqq x\leqq 1$ かつ $-1\leqq u\leqq 1$

㋑　$x+u\leqq 0$ かつ $-1\leqq x\leqq 1$ かつ $-1\leqq u\leqq 1$

㋒　$x+u<0$ かつ $-1<x<1$ かつ $-1<u<1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 48 講　必要十分条件

48　次の各問いに答えよ．

(1)　平面上の曲線 $y=a(x-b)^2+c$ を考える．ただし，a，b，c は実数の定数で $a\neq0$ とする．この曲線上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ における接線が x 軸と交点をもつとき，その交点を $(f(p),\ 0)$ とする．$f(p)$ が p の１次関数になるための a，b，c の必要十分条件を求めよ．

(2)　自然数 n の約数の個数を d とする．n の約数すべてを小さい順に並べて得られる数列を a_k $(1\leqq k\leqq d)$ とする．したがって，$a_1=1$，$a_d=n$，$a_k<a_{k+1}$ $(1\leqq k<d)$ である．このとき，n に対する次の２つの条件(イ)，(ロ)は互いに同値〔(イ) $\Longleftrightarrow$ (ロ)〕であることを示せ．

(イ)　n は 60 の倍数である．

(ロ)　n は 6 個以上の約数をもち，$\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_6}=\dfrac{1}{a_2}$ となる．

【答】 (1) $c=0$　(2) 略

【解答】

(1)　$y=a(x-b)^2+c$ のとき $y'=2a(x-b)$ より $x=p$ における接線は

$$y=2a(p-b)(x-p)+a(p-b)^2+c$$

$$\therefore\quad y=2a(p-b)x-ap^2+ab^2+c \quad \cdots\cdots①$$

$p=b$ のときは接線は $y=c$ となり，x 軸と平行または一致することになるので不適．

$p\neq b$ のとき①が点 $(f(p),\ 0)$ を通るので

$$0=2a(p-b)f(p)-ap^2+ab^2+c$$

$$f(p)=\frac{p+b}{2}-\frac{c}{2a(p-b)}$$

これが p の１次関数となるので，$c=0$

逆に $c=0$ のとき，与えられた曲線は $y=a(x-b)^2$ となり，$y'=2a(x-b)$ より $x=p$ における接線は

$$y=2a(p-b)(x-p)+a(p-b)^2$$

$$\therefore\quad y=2a(p-b)x-ap^2+ab^2$$

これと $y=0$ とを連立して，$2a(p-b)x-ap^2+ab^2=0$ より，これがただ１つの実数解をもつには $p\neq b$ であるので $x=\dfrac{p+b}{2}$ となり，$f(p)$ は p の１次関数となっている．

よって，求める条件は $\boldsymbol{c=0}$

(2)　n が 60 の倍数であるときは n は $60=2^2\times3\times5$ を因数にもつので，n の約数に

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

は含まれる．よって

$$a_2=2,\ a_3=3,\ a_6=6$$

であり

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}=\frac{1}{a_2}$$

ゆえに(イ) $\Longrightarrow$ (ロ)が示された.

次に $\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_6}=\dfrac{1}{a_2}$ より

$$a_2(a_6+a_3)=a_3a_6$$

のときを考える.

ここで a_2 を3以上の奇数とすると，a_3 と a_6 は奇数より左辺は偶数，右辺は奇数となり，矛盾. よって a_2 は偶数. このとき，a_2 を4以上の偶数とすると，4の約数である2が $\{a_n\}$ に含まれないことになるので矛盾. ゆえに $a_2=2$

このとき $a_2(a_6+a_3)=a_3a_6$ は $(a_3-2)(a_6-2)=4$ と変形できるが，$2<a_3<a_6$ より $0<a_3-2<a_6-2$ となるので，$a_3-2=1$，$a_6-2=4$，つまり $a_3=3$，$a_6=6$ となる.

したがって $a_4=4$，$a_5=5$ より n は2，3，4，5，6を約数にもつので少なくとも n は $2^2\times3\times5=60$ を因数にもつ.

ゆえに(ロ) $\Longrightarrow$ (イ)が示された.

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第48講　必要十分条件

48　x, y, u, v を実数として

$$x^2+y^2=1,\ u^2+v^2=1,\ yv<0$$

を満たしているとする．このとき $(1+x+u)^2+(y+v)^2<1$ となるための必要十分条件を x と u を用いて表せ．

【選択肢】

㋐　$x+u<0$ かつ $-1\leqq x\leqq 1$ かつ $-1\leqq u\leqq 1$

㋑　$x+u\leqq 0$ かつ $-1\leqq x\leqq 1$ かつ $-1\leqq u\leqq 1$

㋒　$x+u<0$ かつ $-1<x<1$ かつ $-1<u<1$

【答】　㋒

【解答】

与式より

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots① \\ u^2+v^2=1 & \cdots\cdots② \\ yv<0 & \cdots\cdots③ \\ (1+x+u)^2+(y+v)^2<1 & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

$$① \iff y^2=1-x^2$$
$$y=\pm\sqrt{(1-x)(1+x)} \text{ かつ } -1\leqq x\leqq 1$$

同様に

$$② \iff v=\pm\sqrt{(1-u)(1+u)} \text{ かつ } -1\leqq u\leqq 1$$

③より y と v は異符号であるから，$y\neq 0$，$v\neq 0$ よって $-1<x<1$，$-1<u<1$ であり

$$(y,\ v)=(\pm\sqrt{(1-x)(1+x)},\ \mp\sqrt{(1-u)(1+u)})\ (\text{複号同順})\quad\cdots\cdots⑤$$

このとき④より $(x^2+y^2)+(u^2+v^2)+2(x+u)+2xu+2yv<0$ となるが，

①と②より $1+(x+u)+xu+yv<0$

　これに⑤を代入すると $(1+x)(1+u)-\sqrt{(1-x)(1+x)(1-u)(1+u)}<0$ より

$$\sqrt{(1+x)(1+u)}<\sqrt{(1-x)(1-u)}$$

この両辺を2乗して整理すると $(1+x)(1+u)<(1-x)(1-u)$ つまり $x+u<0$ を得る．

　以上より，$x+u<0$ かつ $-1<x<1$ かつ $-1<u<1$

　逆に，$x+u<0$ かつ $-1<x<1$ かつ $-1<u<1$ のとき，

$x+u<0$ より $x+u<-x-u$ となり，$1+xu$ を加えると $1+x+u+xu<1-x-u+xu$

ゆえに $(1+x)(1+u)<(1-x)(1-u)$

　ここで $-1<x<1$ かつ $-1<u<1$ より，$(1+x)(1+u)$ と $(1-x)(1-u)$ はともに正になるので

$$\sqrt{(1+x)(1+u)}<\sqrt{(1-x)(1-u)}$$

この両辺に $\sqrt{(1+x)(1+u)}\ (>0)$ を掛けると

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$(1+x)(1+u)<\sqrt{(1-x)(1+x)(1-u)(1+u)}$ つまり

$$(1+x)(1+u)<\sqrt{(1-x^2)(1-u^2)} \quad \cdots\cdots ⑥$$

を得る．

ここで①と②より $\sqrt{(1-x^2)(1-u^2)}=\sqrt{y^2}\sqrt{v^2}=|y||v|=|yv|$ であるが，③より $\sqrt{(1-x^2)(1-u^2)}=-yv$ となるので，⑥は $(1+x)(1+u)<-yv$ となる．展開，移項して 2 倍して，1 を加えると $3+2x+2u+2xu+2yv<1$ となる．

ここで①と②より $3=1+x^2+y^2+u^2+v^2$ であるので

$$1+x^2+y^2+u^2+v^2+2x+2u+2xu+2yv<1$$

つまり $(1+x+u)^2+(y+v)^2<1$ が示された．

以上より，求める条件は $\boldsymbol{x+u<0}$ **かつ** $\boldsymbol{-1<x<1}$ **かつ** $\boldsymbol{-1<u<1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。